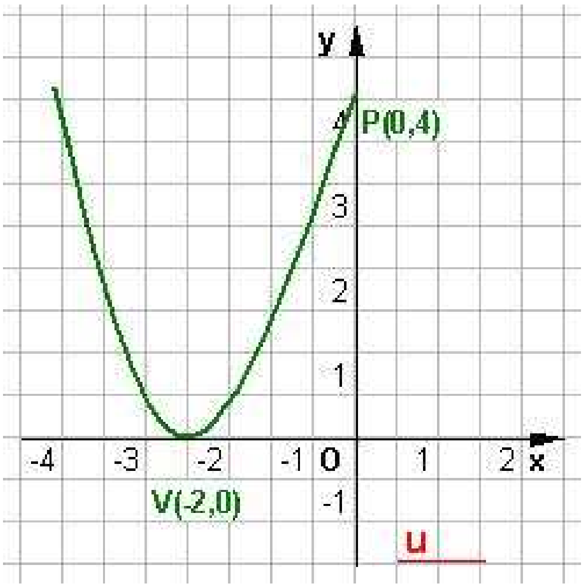
## LA PARABOLA E LE SUE APPLICAZIONI

### Problema 1

**Determinare l'equazione della parabola di vertice V(–2;0) e passante per P(0;4).**




Considerata l'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

basta imporre:

1)l'appartenenza del punto P alla parabola,
2)l'appartenenza del vertice V alla parabola e
3)la coincidenza dell'ascissa del vertice della parabola con l'ascissa di V.

Si ottengono le tre equazioni

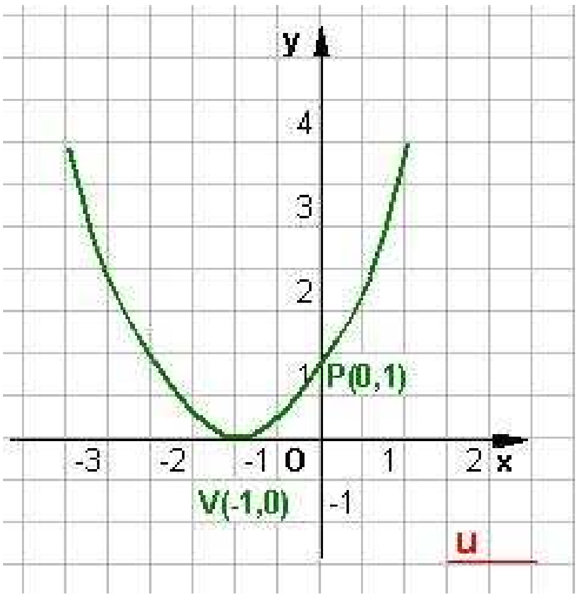
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ -b/2a = -2. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori $a = 1, b = 4, c = 4.$

Dunque l'equazione della parabola è : $y = x^2 + 4x + 4$

### Problema 2

**Determinare l'equazione della parabola di vertice V(–1;0) e passante per P(0;1).**




Considerata l'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

basta imporre:

1)l'appartenenza del punto P alla parabola,
2)l'appartenenza del vertice V alla parabola e
3)la coincidenza dell'ascissa del vertice della parabola con l'ascissa di V.

Si ottengono le tre equazioni

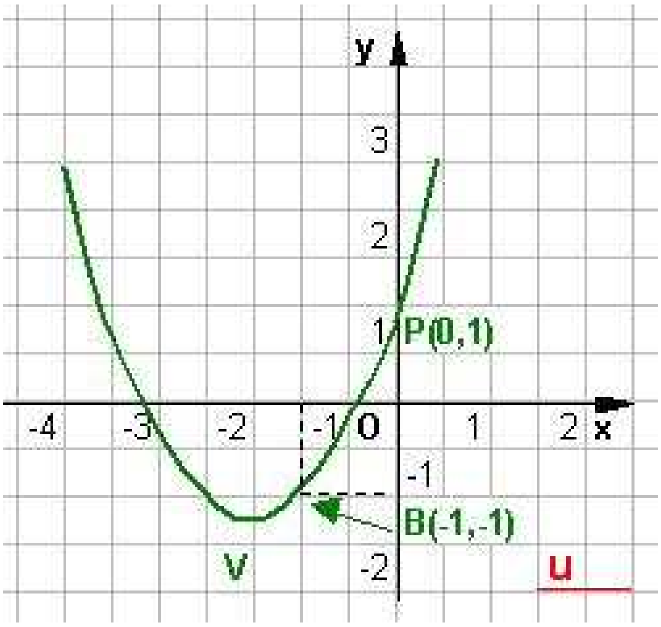
$$\begin{cases} c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ -b/2a = -1. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori $a = 1, b = 2, c = 1.$

Dunque l'equazione della parabola è : $y = x^2 + 2x + 1$

### Problema 3

**Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per P(0; 1), per B (–1 ; –1 ) e ivi tangente alla retta y – x = 0 .**




Considerata l'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

basta imporre:
1)l'appartenenza del punto P alla parabola,
2)l'appartenenza del punto B alla parabola e
3)la condizione di tangenza tra la parabola e la retta y = x.

Si ottengono le tre equazioni

$$\begin{cases} c = 1 \\ a - b + c = -1 \\ (b-1)2 - 4a\, c = 0 \end{cases}$$

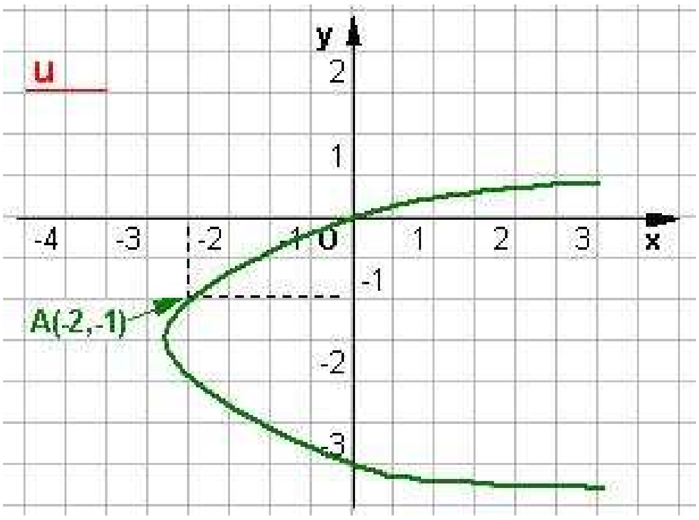
Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori

$a = 1$, $b = 3$, $c = 1$.

Dunque l'equazione della parabola è : $y = x^2 + 3x + 1$.

Problema 4

**Determinare l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse x, passante per A (-2 ; -1), per B ( 0 ; -3 ) e per O ( 0 ; 0 ).**




Considerata l'equazione della parabola

$$x = ay^2 + by + c$$

basta imporre:
1)l'appartenenza del punto A alla parabola,
2)l'appartenenza del punto B e
3)l'appartenenza del punto O.

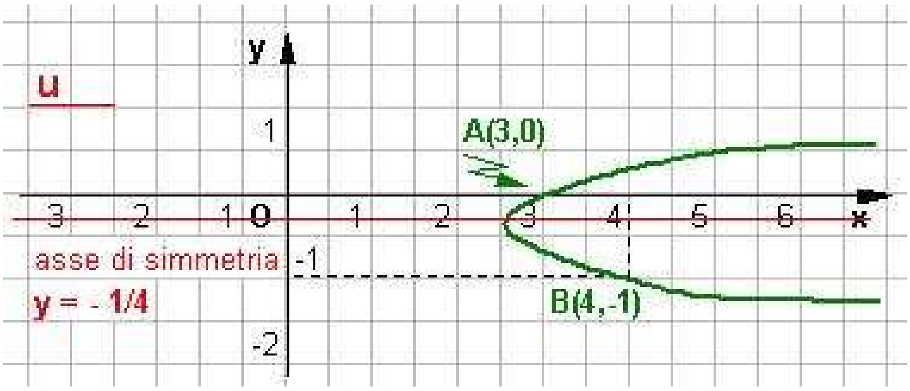
Si ottengono le tre equazioni

$$\begin{cases} c = 0 \\ a - b + c = -2 \\ 9a-3b+c = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$.
Dunque l'equazione della parabola è: $x = y^2 + 3y$ .

Problema 5

**Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle x, avente per asse la retta y = –1/4 , passante per A (3 ; 0) e B ( 4 ; –1).**




Considerata l'equazione della parabola

$$x = ay^2 + by + c$$

basta imporre:

1) la coincidenza della equazione dell'asse della parabola con la retta y = –1/4 ,
2) l'appartenenza del punto A alla parabola e
3)l'appartenenza del punto B.

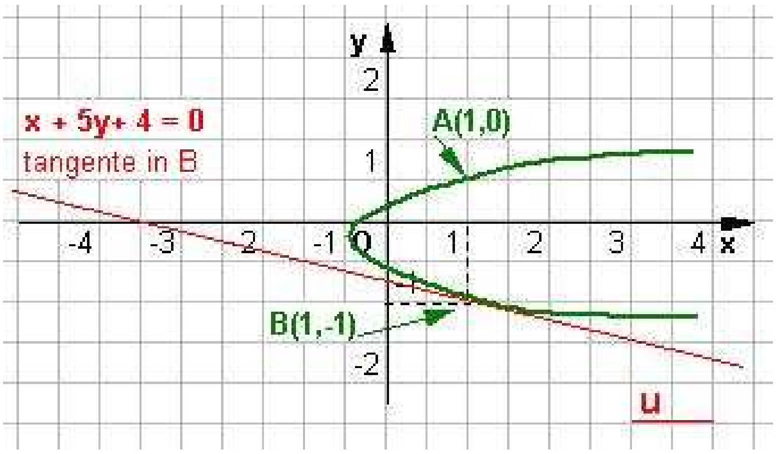
Si ottengono le tre equazioni ,

$$\begin{cases} c = 3 \\ a - b + c = 4 \\ -b/2a = -1/4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori a = 2, b = 1, c = 3.
Dunque l'equazione della parabola è : $x = 2y^2 + y + 3$

Problema 6

**Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, passante per A(1; 0) , per B(1;–1) e ivi tangente alla retta x + 5y + 4 = 0.**




Considerata l'equazione della parabola

$$x = ay^2 + by + c$$

basta imporre :

1)l'appartenenza del punto A alla parabola,
2)l'appartenenza del punto B e
3)la condizione di tangenza tra la parabola e la retta x + 5y + 4 = 0.

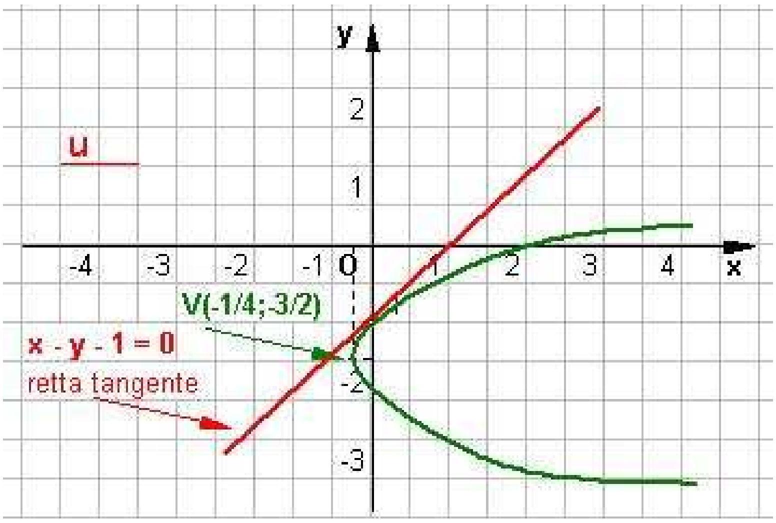
Si ottengono le tre equazioni

$$\begin{cases} c = 1 \\ a - b + c = 1 \\ (b + 5)^2 - 4a(c - 4) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori a = 5, b = 5, c= 1.
Dunque l'equazione della parabola è: $x = 5y^2 + 5y + 1$

## Problema 7

**Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle x, avente il vertice in V (–1/4 ; –3/2 ) e tangente alla retta di equazione x – y – 1 = 0 .**




Considerata l'equazione della parabola

$$x = ay^2 + by + c$$

basta imporre:

1)l'appartenenza del vertice V alla parabola,
2)che l'ascissa generica del vertice $-b/2a$ sia uguale a $-1/4$ e
3)la condizione di tangenza tra la parabola e la retta $x - y - 1 = 0$.

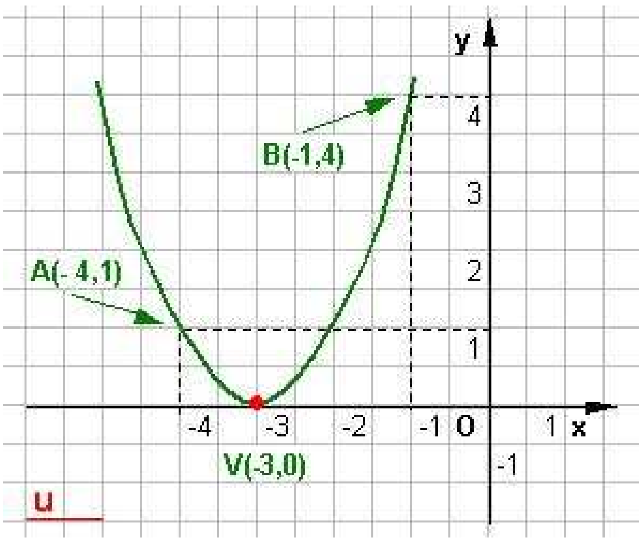
Si ottengono le tre equazioni

$$\begin{cases} -1/4 = 9/4a - 3/2b + c \\ -b/2a = -1/4 \\ (b-1)^2 - 4a(c-1) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$.
Dunque l'equazione della parabola è $x = y^2 + y + 2$

## Problema 8

**Determinare l'equazione della parabola passante per A (–4 ; 1 ), per B (–1 ; 4 ) e avente vertice V (–3 ; 0 ) .**




Considerata l'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

basta imporre:

1)l'appartenenza del punto A alla parabola,
2)l'appartenenza del punto B e
3)l'appartenenza del vertice V.

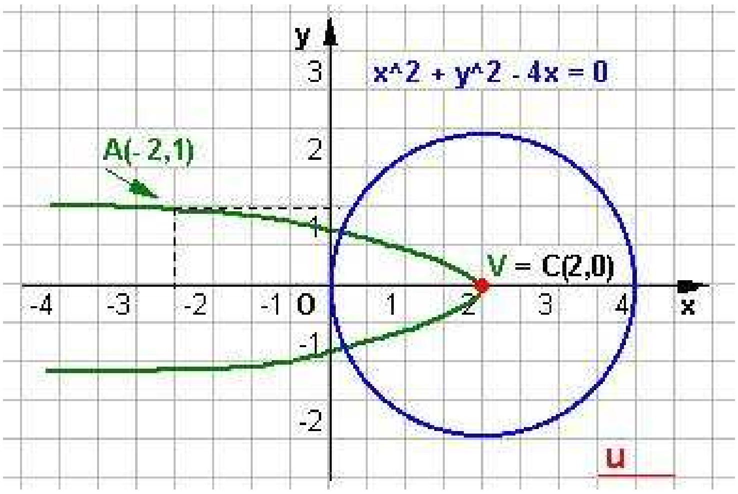
Si ottengono le tre equazioni :

$$\begin{cases} 16a-4b+c = 1 \\ a-b+c = 4 \\ 9a-3b+c = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$.
Dunque l'equazione della parabola è : $y = x^2 + 6x + 9$

## Problema 9

**Determinare l'equazione della parabola con asse coincidente con l'asse x, avente il vertice nel centro della circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x=0$ e passante per A(–2;1).**




Essendo il vertice sull'asse x, si ha $-b/2a = 0$ da cui $b = 0$.

Considerata l'equazione della parabola

$$x = ay^2+c$$

basta imporre:
1) l'appartenenza del centro della circonferenza C ( 2 ; 0 ) alla parabola e
2) il passaggio per il punto A .

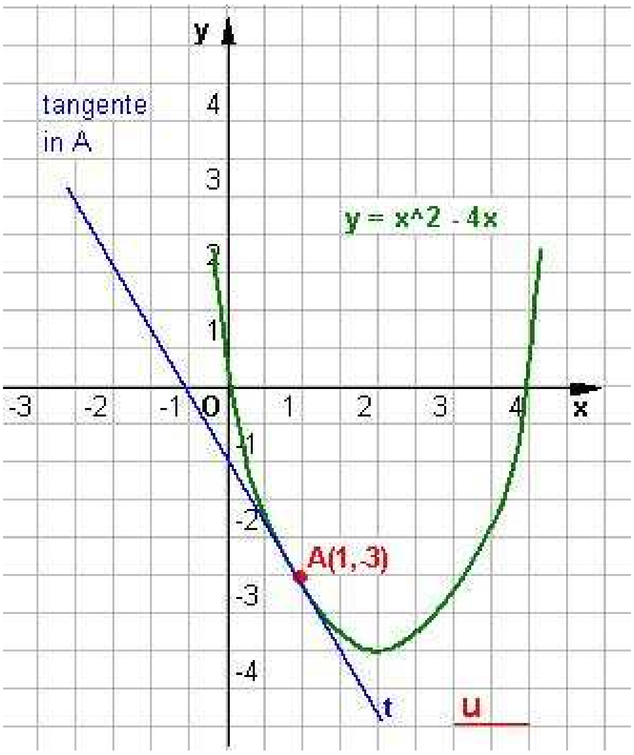
Si ottengono le due equazioni:

$$\begin{cases} c = 2 \\ -2 = a + c \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste equazioni si ottengono i valori $a = -4$ , $c = 2$.
Dunque l'equazione della parabola è : $x = -4y^2 +2$

## Problema 10

**Determinare l'equazione della retta t tangente alla parabola di equazione $y = x^2 - 4x$ nel punto A(1; –3)**




Si scrive l'equazione

$$y +3 = m(x - 1)$$

del fascio proprio di rette di centro A.

Si mettono a sistema l'equazione della parabola e l'equazione del fascio e si impone la condizione di tangenza **Δ = 0**.
Si ottiene

$$(4+m)2- 4(m+3) = 0 , \quad \text{cioè}$$

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \quad \text{da cui} \quad m = -2.$$

Sostituendo tale valore al posto di m nell'equazione del fascio si ottiene

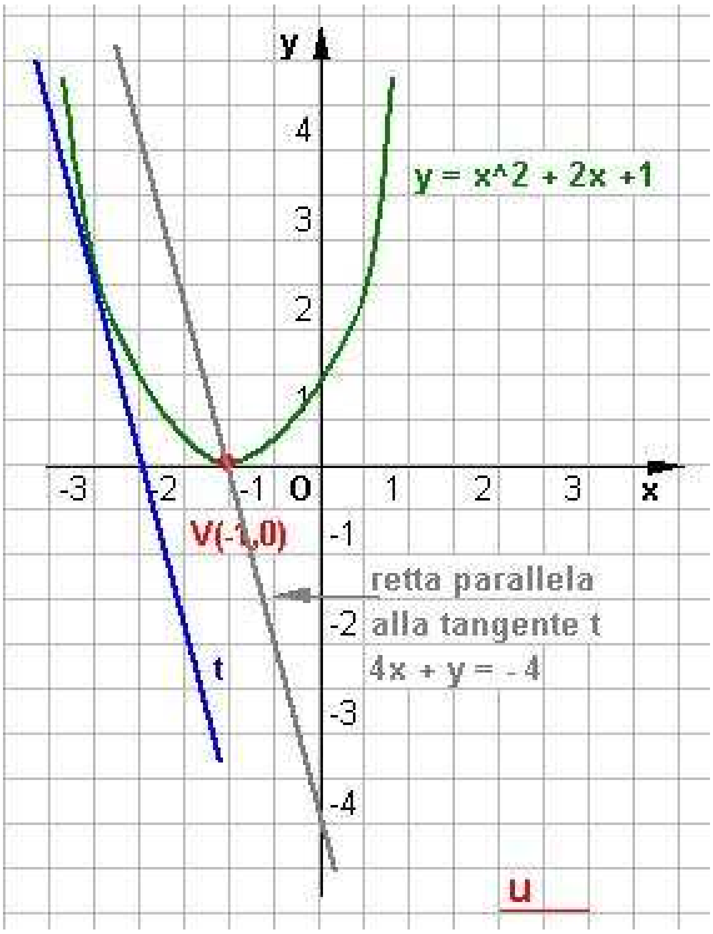
$$y + 3 = - 2(x - 1).$$

Dunque l'equazione della retta è

$$2x + y +1= 0.$$

## Problema 11

**Determinare l'equazione della retta t tangente alla parabola $y = x^2 + 2x + 1$ e parallela alla retta $4x + y + 4 = 0$.**




Si scrive l'equazione

$$4x + y + k = 0$$

del fascio improprio di rette parallele a

$$4x + y + 4 = 0.$$

Si mettono a sistema l'equazione della parabola e l'equazione del fascio e si impone la condizione di tangenza **Δ = 0**.

Si ottiene

$8 - k = 0$ da cu i $k = 8$.

Sostituendo tale valore al posto di k nell'equazione del fascio si ottiene l'equazione della retta cercata:

$$4x + y + 8 = 0.$$

## Problema 12

**Trovare l'equazione della parabola avente per vertice V(2,4) e per fuoco F(2,3).**

L'equazione generica di una parabola ha espressione $y = ax^2 + bx + c$ abbiamo quindi necessità di avere tre equazioni in tre incognite per ottenere i tre parametri a, b, c sfrutteremo le coordinate del vertice e del fuoco ottenendo le tre equazioni cercate :

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ e } F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

Quindi nel nostro caso :

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 4 \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a} = 4 \\ \dfrac{1-(b^2-4ac)}{4a} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = 4a \\ -b^2 + 4ac = 16a \\ 1 - b^2 + 4ac = 12a \end{cases}$$

$$-1 \begin{cases} b = -4a \\ -16a^2 + 4ac - 16a = 0 \\ \underline{-16a^2 + 4ac - 12a + 1 = 0} \end{cases}$$
$$// \quad // \quad 4a + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 4a = -1 \\ b = -4a \\ -16a^2 + 4ac - 16a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1/4 \\ b = -4(-1/4) = 1 \\ -16(1/16) + 4(-1/4)c - 16(-1/4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1/4 \\ b = 1 \\ -16(1/16) + 4(-1/4)c - 16(-1/4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1/4 \\ b = 1 \\ -1 - c + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1/4 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

da cui l'equazione della parabola

$$\mathbf{y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3}$$

Problema 13

**Trovare l'equazione della parabola avente per fuoco F(2,2) e per direttrice x = – 1.**

Come il caso precedente sfrutteremo le espressioni della coordinata del fuoco e della direttrice, notando però che x = –1 è perpendicolare all'asse della parabola di equazione $y = -\frac{b}{2a}$, se ne deduce che l'equazione generica della parabola ha espressione $x = ay^2 + by + c$.

$$F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) \quad \text{eq. direttrice} \quad x = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{1+\Delta}{4a} = -1 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = 4a \\ 1 + \Delta = 4a \\ \underline{1 - \Delta = 8a} \end{cases}$$
$$2 \;\; // \;\; = 12a$$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -4(1/6) = -2/3 \\ 1 + \Delta = 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -2/3 \\ b^2 - 4ac = 4a - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -2/3 \\ \end{cases}$$

$-6c = -7$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -2/3 \\ -2c/3 = 2/3 - 1 - 4/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -2/3 \\ -\frac{6}{9}c = \frac{-4+6-9}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ 4/9 - 2c/3 = 2/3 - 1 \end{cases}$$

$b = -2/3$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -2/3 \\ c = 7/6 \end{cases}$$

da cui l'equazione della parabola

$$x = \frac{1}{6}y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{7}{6}$$

Problema 14

**Trovare le intersezioni della retta y = x + 4 con la parabola $y = -x^2 + 6x$.**

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x^2 + 6x \end{cases}$$

elaboriamo la seconda dopo la sostituzione :

$x + 4 = -x^2 + 6x$

$x^2 - 6x + x + 4 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} =$$

$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = x_1 + 4 = 1 + 4 = 5$ **A (1,5)**

$x_2 = 4 \Rightarrow y_2 = x_2 + 4 = 4 + 4 = 8$ **B (4,8)**

Problema 15

**Trovare per quali valori di m la retta y = mx è tangente alla parabola $y = x^2 - 6x + 8$.**

$$\begin{cases} y = mx \\ y = x^2 - 6x + 8 \end{cases}$$

$mx = x^2 - 6x + 8$

$x^2 - x(6 + m) + 8 = 0$

la condizione di tangenza è

$\Delta = 0 \quad b^2 - 4ac = 0$

$(6 + m)^2 - 32 = 0$

$36 + 12m + m^2 - 32 = 0$

$m^2 + 12m + 4 = 0$

$$m_{12} = -6 \pm \sqrt{36-4} = -6 \pm \sqrt{32} = -6 \pm 4\sqrt{2}$$

da cui le equazioni delle tangenti

$$y = \left(-6 - 4\sqrt{2}\right)x \quad \text{e} \quad y = \left(-6 + 4\sqrt{2}\right)x$$

Problema 16

**Data la parabola $y = 3x^2 - 2x + 1$, determinare per quale valore di m la retta y = mx – 1 è tangente ad essa ; determinare anche il punto di contatto.**

$$\begin{cases} y = mx + 1 \\ y = 3x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$mx + 1 = 3x^2 - 2x + 1$

$3x^2 - 2x - mx = 0$

$3x^2 - x(2 + m) = 0$ **(*)**

la condizione di tangenza è

$\Delta = 0 \quad b^2 - 4ac = 0$

$(2 + m)^2 = 0$